

# Comparación entre el análisis factorial múltiple y el análisis de correspondencias intrabloques ponderado en una tabla de contingencia con doble estructura de partición

ANDREA PAOLA MARÍN<sup>a</sup>  
AUTOR

CAMPO ELÍAS PARDO<sup>b</sup>  
DIRECTOR

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

---

## Resumen

El análisis factorial múltiple para tablas de contingencia (AFMTC) es una técnica que integra el análisis de correspondencias intratablas y el análisis factorial múltiple para el análisis de tablas de contingencia con estructura de partición en una dirección (filas o columnas). El análisis de correspondencias intrabloques ponderado (ACIBP) es una extensión del anterior, para el análisis de tablas de contingencia con doble estructura de partición. Dado que algunas tablas de contingencia pueden arreglarse en una o dos direcciones se comparan ambos métodos analizando las ventajas y restricciones que tiene cada análisis.

**Palabras clave:** Análisis factorial múltiple, tablas de contingencia estructuradas, análisis de correspondencias intrabloques..

## Abstract

Multiple factor analysis for contingency tables (MFACT) is a technique that integrates the correspondence analysis intratables and multiple factorial analysis for analyzing contingency tables with partition structure in a direction (rows or columns). Weighted intra blocks correspondence analysis (WIBCA) is an extension of the multiple factor analysis for contingency tables, it is applied to contingency tables with double partition structure. Since some contingency tables can be arranged in one or two directions, we compared both methods identifying the advantages and restrictions of each analysis.

**Key words:** Multiple factor analysis, structured contingency tables, intra blocks corresponde analysis.

## 1. Introducción

Las tablas de contingencia son tablas de frecuencia obtenidas cruzando las categorías de dos variables cualitativas definidas sobre una misma población de individuos. El conjunto de las filas representan a las categorías de una variable y el conjunto de las columnas las categorías de la otra (Escofier & Pagès 1992, p. 27). En algunas ocasiones dichas filas o columnas pueden estar estructuradas mediante particiones definidas por otras variables cualitativas, originando las tablas de contingencia múltiples o tablas de contingencia estructuradas. Por ejemplo, si se hacen mediciones de ciertas variables en el en el tiempo, y

---

<sup>a</sup>Estudiante de estadística. E-mail: apmaring@unal.edu.co

<sup>b</sup>Profesor Asociado. E-mail: cepardot@unal.edu.co

se esta interesado en que esta dimensión temporal intervenga en el análisis se dispone de una sucesión de tablas indexadas por el tiempo que al yuxtaponerlas formar una tabla estructurada.

Cuando dicha estructura de partición se presenta en una sola dirección, es decir, en las filas o en las columnas, Bécue & Pagès (2004) proponen el análisis factorial múltiple para tablas de contingencia (AFMTC). Combinando el análisis factorial múltiple (Escofier & Pagès 1984) y el análisis de correspondencias intratablas (AC intra). El análisis de correspondencias intra tablas propuesto por Benzécri (1983) permite eliminar a priori el efecto introducido por la estructura de partición de la tabla. Para deducir los AC intra se utilizan los resultados presentados por Escofier (1983) donde se generaliza el AC a un modelo cualquiera, en este caso, el modelo de independencia intrabandas fila o columna. Sin embargo, la estructura de partición puede inducir bandas más influyentes que otras y la ponderación del análisis factorial múltiple (AFM) permite equilibrarlas multiplicando los pesos del AC intra por el inverso del primer valor propio de los análisis separados de cada banda.

Para considerar la estructura de partición inducida por las filas y las columnas Pardo (2010a) propone el análisis de correspondencias intrabloques ponderado (ACIBP). Este, es una extensión del AFMTC, que integra el análisis de correspondencia intrabloques (ACIB) y el AFM. El ACIB es el AC respecto al modelo de independencia intrabloques, el AFM introduce una ponderación en las filas y las columnas para equilibrar su influencia.

En el análisis de algunas tablas de contingencia se obtienen bloques que pueden ser arreglados de dos formas diferentes: yuxtaponiéndolos en una dirección o en las dos. Esto implica dos análisis diferentes al mismo conjunto de datos dependiendo de la forma en que se hace la yuxtaposición. Resulta interesante entonces, realizar los análisis sobre un mismo conjunto de datos con el objetivo de comparar los resultados obtenidos y evidenciar si la estructura de doble partición presenta alguna ventaja sobre la partición en una sola dirección. En este trabajo se hace una breve revisión de los aspectos teóricos del AFMTC y el ACIBP y se comparan utilizando los datos sobre mortalidad en las diferentes comunidades autónomas de España.

## 2. Notación

Para considerar la estructura de doble partición se adopta la notación de Pardo (2010a) y la partición en una sola dirección se considera un caso particular. Se parte de una matriz de frecuencias relativas  $\mathbf{F}$  de tamaño  $I \times K$ , Las  $K$  columnas están estructuradas en  $J$  grupos que forman las bandas columna  $\{\mathbf{F}_{*j}; j = 1, \dots, J\}$ , la banda columna  $\mathbf{F}_{*j}$  tiene tamaño  $I \times K_j$ . Las  $I$  filas están estructuradas en  $L$  grupos que forman las bandas fila  $\{\mathbf{F}_{l*}; l = 1, \dots, L\}$ , la banda fila  $\mathbf{F}_{l*}$  tiene tamaño  $I_l \times K$ . Al cruzar la banda columna  $\mathbf{F}_{*j}$  con la banda fila  $\mathbf{F}_{l*}$  se obtiene el bloque  $\mathbf{F}_{lj}$  de tamaño  $I_l \times K_j$ . Se nota  $f_{ik}^{lj}$  a la frecuencia relativa del cruce de la modalidad  $i$  con la modalidad  $k$  en el bloque  $\mathbf{F}_{lj}$ .

Las marginales fila y columna de la tabla  $\mathbf{F}$  son  $f_{i.}^l$  y  $f_{.k}^j$  respectivamente. Las marginales fila y columna para la banda columna  $\mathbf{F}_{*j}$  son  $f_{i.}^{lj}$  y  $f_{.k}^j$ , análogamente las marginales fila y columna para la banda fila  $\mathbf{F}_{l*}$  son  $f_{i.}^l$  y  $f_{.k}^{lj}$ .

## 3. Análisis factorial múltiple aplicado a tablas de contingencia (estructura de partición en una dirección)

La tabla de la figura 1 tiene estructura de partición tanto en las filas como en las columnas, si consideramos solamente la partición en una dirección, la estructura de la tabla  $\mathbf{F}$  sería:  $\mathbf{F}' = [\mathbf{F}'_{1*}, \dots, \mathbf{F}'_{l*}, \dots, \mathbf{F}'_{L*}]$  en el caso de las filas y  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{*1}, \dots, \mathbf{F}_{*j}, \dots, \mathbf{F}_{*J}]$ , en el caso de las columnas. Sin pérdida de generalidad consideramos la estructura de partición inducida por las columnas, es decir, consideramos la tabla  $\mathbf{F}$  como la yuxtaposición de  $J$  bandas columna.

Escofier (1984) presenta una generalización del análisis de correspondencia utilizando un modelo  $\mathbf{A} = a_{ik}^{lj}$  diferente al modelo de independencia. Así, el AC intra propuesto por Benzécri (1983) es el AC

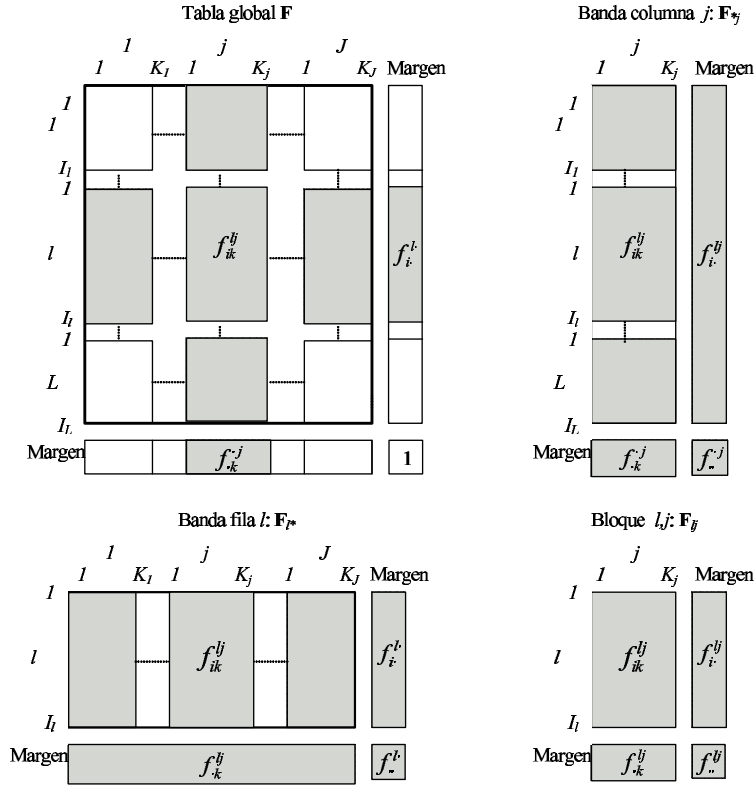


FIGURA 1: TC con doble estructura de partición

con respecto al modelo de independencia intratablas  $a_{ik}^{lj} = \frac{f_{ik}^{lj} f_{..}^j}{f_{..}^l f_{.k}^j}$ . De otro lado, el AFM propuesto por Escofier & Pagès (1984) pondera las columnas por el inverso del primer valor propio del análisis separado de cada banda ( $\lambda_1^j$ ), así, ninguna banda pueda determinar por si sola el análisis de la tabla global. El AFMTC (Bécue & Pagès 2004) de la tabla  $F$  es el AC intra bandas columna con las ponderaciones del AFM. Llevado a la forma general (Escofier & Pagès 1992, cap. 4) es el  $ACP(\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{D})$  con:

$$x_{ik}^{lj} = \frac{f_{ik}^{lj} - a_{ik}^{lj}}{f_{..}^l f_{.k}^j}, \quad \mathbf{M} = \text{Diag}\left(\frac{f_{..}^j}{\lambda_1^j}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \text{Diag}(f_{..}^l) \quad (1)$$

### 3.1. Propiedades

#### 3.1.1. Distancias entre filas y columnas

El cuadrado de la distancia entre dos puntos fila  $i$  y  $i'$  es

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_1^j} \sum_{k \in K_j} \frac{1}{f_{.k}^j} \left( \frac{f_{ik}^{lj} - a_{ik}^{lj}}{f_{..}^l} - \frac{f_{i'k}^{lj} - a_{i'k}^{lj}}{f_{..}^l} \right)^2 \quad (2)$$

Dos puntos fila estarán próximos si las desviaciones entre la fila de la tabla y la del modelo intra se parecen para todas las columnas  $k$ .  $\lambda_1^j$  equilibria la influencia de la banda  $F_{*j}$ .

El cuadrado de la distancia entre el punto  $k$  de la banda  $j$  y el punto  $k'$  de la banda  $j'$  es

$$\sum_i \frac{1}{f_{..}^l} \left[ \left( \frac{f_{ik}^{lj}}{f_{.k}^j} - \frac{f_{i.}^{lj}}{f_{..}^l} \right) - \left( \frac{f_{ik'}^{lj'}}{f_{.k'}^{j'}} - \frac{f_{i.}^{lj'}}{f_{..}^{j'}} \right) \right]^2 \quad (3)$$

Dos puntos columna que pertenecen a la misma banda  $j$  estarán próximos si su distribución en las filas es similar. Cuando pertenecen a bandas diferentes, estarán próximos si las desviaciones entre el perfil columna y el perfil medio ponderadas por el inverso de la marginal fila son parecidas en todas las filas  $i$ .

### 3.1.2. Contribución de la banda $\mathbf{F}_{*j}$ a la inercia de total

La inercia de la subnube definida por  $\mathbf{F}_{*j}$  es la suma de la contribución a la inercia de sus  $K_j$  puntos, ponderada por el inverso del primer valor propio del ACP de  $\mathbf{F}_{j*}$ .

$$\sum_{k \in K_j} \frac{1}{\lambda_1^j} f_{\cdot k}^{j \cdot} \sum_i \left( \frac{f_{ik}^{lj} - a_{ik}^{lj}}{f_{i \cdot}^{l \cdot} f_{\cdot k}^{j \cdot}} \right)^2 f_i^l. \quad (4)$$

### 3.1.3. Representaciones superpuestas

La representación de la nube completa se realiza mediante la proyección sobre los planos engendrados por los  $s$  primeros ejes de inercia del  $ACP(\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{D})$  definido en (1). Las fórmulas de transición permiten representar en el mismo plano factorial los puntos fila y columna (Escofier & Pagès 1984, cap.4). La representación superpuesta de las  $J$  subnubes, se obtiene introduciendo como suplementarias en el AFMTC las filas de la tabla  $\tilde{\mathbf{X}}_{*j} = [\mathbf{0} \dots \mathbf{X}_{*j} \dots \mathbf{0}]$ , donde la tabla  $\mathbf{X}_{*j}$  que contiene las coordenadas de las filas desde el punto de vista de la banda  $\mathbf{F}_{*j}$  es completada con ceros para obtener una tabla del mismo tamaño que la tabla global  $\mathbf{X}_{\mathbf{I} \times \mathbf{K}}$  (Bécue & Pagès 2004, p. 9-11). Así, es posible comparar la posición media de cada fila, con las  $J$  posiciones particulares definidas por cada partición.

## 4. Análisis de correspondencias intrabloques ponderado

Para considerar la doble estructura de partición se utiliza el ACIB. Este, es el AC con respecto al modelo de independencia intrabloques  $b_{ik}^{lj} = \frac{f_{i \cdot}^{lj} f_{\cdot k}^{lj}}{f_{\cdot \cdot}^{lj}}$ , visto como un  $ACP(\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{D})$  es:

$$x_{ik}^{lj} = \frac{f_{ik}^{lj} - b_{ik}^{lj}}{f_{i \cdot}^{l \cdot} f_{\cdot k}^{j \cdot}}, \quad \mathbf{M} = \text{Diag}(f_{\cdot k}^{j \cdot}) \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \text{Diag}(f_i^l)$$

El ACIBP propuesto por Pardo (2010a) introduce las ponderaciones del AFM en el modelo del ACIB, de esta forma se considera una extensión del AFMTC, pues considera la doble estructura de partición de la tabla de contingencia. Considerado como un  $ACP(\mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{D})$  es:

$$x_{ik}^{lj} = \frac{f_{ik}^{lj} - b_{ik}^{lj}}{f_{i \cdot}^{l \cdot} f_{\cdot k}^{j \cdot}}, \quad \mathbf{M} = \text{Diag}(\alpha_j f_{\cdot k}^{j \cdot}) \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \text{Diag}(\beta_l f_i^l) \quad (5)$$

Los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_l$  se obtienen a partir de un proceso iterativo que va alternando los ACP de las bandas fila y columna para estabilizar los pesos de las columnas y las filas.

### 4.1. El ACIBP como dos AFM

Como se dijo anteriormete el ACIBP es la generalización del AFMTC en el caso en que la tabla presenta estructura de doble partición. Sin embargo, si consideramos solamente una estructura de partición de la tabla, el ACIBP no es equivalente al AFMTC. En el AFMTC la matriz de métrica es como se muestra en la fórmula 1, su traza es  $h_{LJ} = \text{traza}(\mathbf{M}) = \sum_{lj} \frac{f_{\cdot \cdot}^{lj}}{\lambda_1^{lj}}$ . En el ACIBP, para recuperar las relaciones simétricas entre la matriz diagonal y la matriz de métrica se pone la condición que las trazas de ambas

matrices deben ser uno. Así, la matriz de métrica del ACIBP es  $\mathbf{M}^* = \frac{1}{h_{LJ}}\mathbf{M}$ . Para poder interpretar por ejemplo, los valores propios y las contribuciones a la inercia tal y como se hace en el AFMTC es necesario multiplicar la matriz  $\mathbf{M}^*$  por el coeficiente  $h_{LJ}$ .

## 4.2. Propiedades

### 4.2.1. Distancias entre filas y columnas

El cuadrado de la distancia entre dos puntos fila  $i$  del bloque  $l$  y  $i'$  del bloque  $l'$  es

$$\sum_j \alpha_j \sum_{k \in K_j} \frac{1}{f_{.k}^{.j}} \left( \frac{f_{ik}^{lj} - b_{ik}^{lj}}{f_{i.}^l} - \frac{f_{i'k}^{l'j} - b_{i'k}^{l'j}}{f_{i'.}^{l'}} \right)^2$$

Dos puntos fila estarán próximos si las desviaciones entre la fila de la tabla y la del modelo de independencia intrabloques se parecen para todas las columnas  $k$  de la banda columna  $\mathbf{F}_{*j}$ .  $\alpha_j$  equilibria la influencia de cada banda  $\mathbf{F}_{*j}$ .

El cuadrado de la distancia entre dos columnas  $k$  de la banda  $j$  y  $k'$  de la banda  $j'$  es

$$\sum_l \beta_l \sum_{i \in I_l} \frac{1}{f_{i.}^l} \left( \frac{f_{ik}^{lj} - b_{ik}^{lj}}{f_{.k}^{.j}} - \frac{f_{ik'}^{l'j'} - b_{ik'}^{l'j'}}{f_{.k'}^{.j'}} \right)^2$$

Dos puntos columna estarán próximos si las desviaciones entre la columna de la tabla y la del modelo de independencia intrabloques se parecen para todas las filas  $i$  de la banda fila  $\mathbf{F}_{l*}$ .  $\beta_l$  equilibria la influencia de cada banda  $\mathbf{F}_{l*}$ .

### 4.2.2. Contribución de una banda a la inercia de total

La contribución en este caso puede ser calculada para una banda fila  $\mathbf{F}_{l*}$  o una banda columna  $\mathbf{F}_{*j}$ . La inercia de la subnube definida por  $\mathbf{F}_{*j}$  es la suma de la contribución a la inercia de sus  $K_j$  puntos, ponderada por los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_l$ .

$$\sum_{k \in K_j} \alpha_j f_{.k}^{.j} \sum_l \beta_l \sum_{i \in I_l} \left( \frac{f_{ik}^{lj} - b_{ik}^{lj}}{f_{i.}^l f_{.k}^{.j}} \right)^2 f_{i.}^l \quad (6)$$

### 4.2.3. Representaciones superpuestas

La representación superpuesta es posible para las  $J$  subnubes definidas por las bandas columna y para las  $L$  subnubes definidas por las bandas fila. Para las bandas columna se obtiene introduciendo como suplementarias en el ACIBP las filas de la tabla  $\tilde{\mathbf{X}}_{*j} = [\mathbf{0} \dots \mathbf{X}_{*j} \dots \mathbf{0}]$ , donde la tabla  $\mathbf{X}_{*j}$  que contiene las coordenadas de las filas desde el punto de vista de la banda  $\mathbf{F}_{*j}$  es completada con ceros para obtener una tabla del mismo tamaño que la tabla global  $\mathbf{X}_{\mathbf{I} \times \mathbf{K}}$  (Pardo 2010a, cap.4).

## 4.3. Comparación de los métodos

Para la comparación, suponemos la tabla del AFMTC como una yuxtaposición de bandas columnas. Por tanto  $I_1 = \dots = I_l = \dots = I_L$  y así las bandas fila  $\mathbf{F}_{l*}$  de la tabla 1 son dispuestas en un solo bloque fila. Disponer de esta forma los bloques lleva a que las bandas columna del AFMTC coincidan con los bloques del ACIBP. Por ejemplo, la primera banda columna del AFMTC es  $\mathbf{F}_{11}$  que coincide con el bloque  $\mathbf{F}_{11}$  del ACIBP. Finalmente, el modelo de independencia para el AC coincide en ambos análisis.

TABLA 1: Tabla de comparación de AFMTC y el ACIBP

Criterio	AFMTC	ACIBP
Tabla analizada	$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{11}, \dots, \mathbf{F}_{1J}, \dots, \mathbf{F}_{L1}, \dots, \mathbf{F}_{LJ}]$	$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_{ij})_{L \times J}$
Dimensión filas	$I_l$ puntos en $\mathbb{R}^{K \times L}$	$I = I_l \cdot L$ puntos en $\mathbb{R}^K$
Dimensión columnas	$\kappa \times L$ puntos en $\mathbb{R}^{I_l}$	$\kappa$ puntos en $\mathbb{R}^I$
Ponderaciones del AFM	$\frac{1}{\lambda_j^{I_j}}$	$\alpha_j$ y $\beta_l$
Pesos filas	$f_{i \cdot} = \sum_j f_{i \cdot}^j$	$\beta_l f_{i \cdot}^l$
Pesos columnas	$\frac{f_{\cdot k}^{I_j}}{\lambda_j^{I_j}}$	$\alpha_j f_{\cdot k}^j$
Modelo independencia AC	$a_{ik}^{I_j} = \frac{f_{i \cdot}^j f_{\cdot k}^j}{f^{I_j}}$	$b_{ik}^{I_j} = \frac{f_{i \cdot}^j f_{\cdot k}^j}{f^{I_j}}$

## 5. Comparación del AFMTC y ACIBP en un análisis de la mortalidad en España

### 5.1. Estructura de los datos

Para la comparación del AFMTC y el ACIBP se utilizan los datos sobre mortalidad en las 17 comunidades autónomas de España. Estos datos son compilados por Pardo (2010a, cap.5) y disponibles en el paquete pamctdp (Pardo 2010b) de R Development Core Team (2010). Las tasas de mortalidad estandarizadas por el método directo para las comunidades, utilizan como población de referencia la definida por Eurostat para la Comunidad Europea. Para 1995 se promedian las tasas crudas de mortalidad de 1994, 1995 y 1996, para el 2005 se promedian las del 2004, 2005 y 2006. En Niederlaender (2006) se puede consultar la metodología usada por Eurostat. La información que se utiliza se encuentra organizada de la siguiente forma: se consideran las tasas de mortalidad por género y por dos grupos de edad, muertes prematuras (entre 35 y 64 años) y no prematuras (65 años o más). Con esto se construyen cuatro grupos poblacionales, masculino prematuro (mp), masculino no prematuro (mnp), femenino prematuro (fp) y femenino no prematuro (fnp). También se consideran dos años, 1995 y 2005. Se dispone de 8 bloques, cada uno cruza un grupo poblacional y un año.

Para el AFMTC los bloques se yuxtaponen en una sola dirección. Así, se construye la tabla esquematizada en la figura 2, conformada por 8 bandas columna. La estructura de partición esta inducida por la variable categórica que cruza sexo, edad y año. Las bandas columna son masculino prematuro 1995 (mp95), masculino no prematuro 1995 (mnp95), femenino prematuro 1995 (fp95), femenino no prematuro (fnp95), masculino prematuro 2005 (mp05), masculino no prematuro 2005 (mnp05), femenino prematuro 2005 (fp05) y femenino no prematuro 2005 (fnp05). La tabla de la figura 2 de tamaño  $17 \times 110$  cruza las 17 comunidades con las causas de mortalidad de mayor frecuencias para cada una de las bandas.

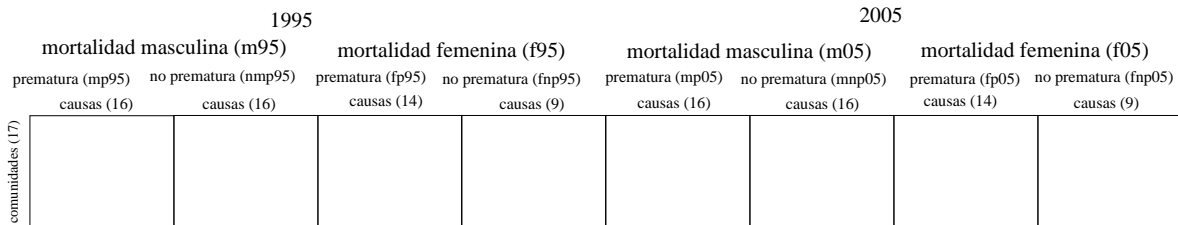


FIGURA 2: Esquema de la TC comunidades  $\times$  causas de mortalidad (sexo  $\times$  edad  $\times$  años): yuxtaposición de 8 bloques en una dirección

		mortalidad masculina (m)		mortalidad femenina (f)	
		prematura (mp)	no prematura (mnp)	prematura (fp)	no prematura (fnp)
		causas (16)	causas (16)	causas (14)	causas (9)
1995	comunidades (17)				
2005					

FIGURA 3: Esquema de la TC (años  $\times$  comunidades)  $\times$  causas de mortalidad (sexo  $\times$  edad): yuxtaposición de 8 bloques en dos direcciones

Para el ACIBP se dispone la tabla en estructura de doble partición como se muestra en la figura 3. Los bloques se yuxtaponen en las dos direcciones. En las filas la estructura de partición es inducida por los años, por tanto se tienen dos bloques fila (1995 y 2005). En las columnas la estructura de partición es inducida por sexo  $\times$  edad, por tanto, hay 4 bandas columna. Esta tabla es de tamaño  $34 \times 55$ .

## 5.2. Análisis de las representaciones globales

El AFMTC aplicado a la tabla 2 elimina la variabilidad inducida por la variable que cruza sexo  $\times$  edad  $\times$  años. El ACIBP aplicado a la tabla 3 elimina la variabilidad inducida por la variable que cruza sexo  $\times$  edad (bandas columna) y por años (bandas fila). De esta forma, en los dos análisis se analizan las causas de mortalidad en las comunidades quitando el efecto de las variables que inducen a la estructura de partición. El modelo de independencia intratablas utilizado en el AFMTC (1) coincide con el modelo de independencia intrabloques utilizando en el ACIBP (5).

Para poder comparar los pesos o las contribuciones a la inercia en los análisis, es necesario presentar el AFMTC como un ACIBP donde hay solamente una banda fila o el ACIBP como dos AFM, uno para las bandas filas y otro para las bandas columna.

### 5.2.1. Pesos

En la tabla que se en el AFMTC las causas de mortalidad para 1995 y 2005 están en columnas diferentes. La causa de mortalidad  $k$  en la banda  $F_{ij}$  es un punto en  $\mathbb{R}^{17}$ , su peso es la tasa de mortalidad total por la causa  $k$  multiplicada por  $\alpha_{ij}$  (entendiendo el AFMTC como un ACIBP de una banda fila). En la tabla de análisis para el ACIBP las causas de mortalidad no están separadas por años, cada causa de mortalidad  $k$  es un punto en  $\mathbb{R}^{34}$ , el peso que se le asigna corresponde a la tasa de mortalidad total por la causa  $k$  en las 17 comunidades para los dos años multiplicado por el coeficiente  $\alpha_j$ . La tabla 1 muestra que las marginales fila y columna están relacionadas en los dos análisis. Así la diferencia entre los pesos esta dada por los valores propios asociados a los respectivos AC de cada análisis.

Por ejemplo la mortalidad por sida en los hombres adultos tiene un peso de 0.0096 en el ACIBP, mientras que en el AFMTC aparece dos veces, una para 1995 con un peso de 0.0044 y otra para el 2005 con un peso de 0.0042. Si sumamos estos dos pesos obtenemos aproximadamente el peso del ACIBP.

Igual sucede con los pesos de las comunidades, en el ACIBP cada comunidad tiene 2 puntos en  $\mathbb{R}^{55}$ , uno para cada año, mientras que en el AFMTC a cada comunidad le corresponde un punto en  $\mathbb{R}^{110}$ . Por ejemplo, en el ACIBP Galicia tiene uno punto para 1995 y otro para el 2005, con pesos 0.030 y 0.028. En el AFMTC el peso de Galicia es 0.059 que es aproximadamente la suma de los dos pesos del ACIBP.

### 5.2.2. Contribuciones a la inercia

En esta sección se interpreta el AFMTC como un ACIBP con una banda fila. El histograma de valores propios del AFMTC se muestra en la figura 4. Hay un salto importante al pasar del primer al segundo eje, sin embargo se toman tres ejes para el análisis, reteniendo el 55.8% de la inercia. Al igual que en el AFMTC, para el ACIBP se toman tres ejes para el análisis, reteniendo un 53.7% de la inercia (figura 4 y tabla 2).

La tabla 4 contiene la descomposición de la inercia para las bandas de los dos análisis. En el AFMTC, los grupos tienen una contribución entre el 12% y el 14% para el primer eje exceptuando masculino prematuro 1995 (6.9%). Los dos grupos que están mejor representados en el primer plano factorial son femenino no prematuro en el 2005 (54.2%) y femenino no prematuro en 1995 (53.3%).

En el ACIBP, para el primer eje las contribuciones se encuentran alrededor del 27%, exceptuando el grupo mortalidad masculina prematura, con una contribución del 18%. En el segundo eje, las contribuciones no están tan equilibradas, el grupo que más contribuye a la inercia es masculino prematuro (31.6%) y el grupo que menos contribuye a la inercia es femenino prematuro (17.7%). Los dos años contribuyen prácticamente con la misma proporción a la inercia del primer plano factorial.

Ambos análisis coinciden en que el grupo mortalidad masculina prematura es el que menos contribuye a la inercia del primer eje. La contribución a la inercia para los dos grupos que representan a la mortalidad masculina prematura en el AFMTC es 24,9%, un porcentaje cercano a la contribución que hace este grupo en el ACIBP (25.2%). Esto se explica en la fórmula 6 para el cálculo la inercia de una banda fila y columna en el ACIBP respectivamente. En la fórmula del ACIBP el segundo sumando hace que se sume sobre los dos años y que cada año sea ponderado por el coeficiente  $\beta_l$ , el primer sumando pondera cada causa de mortalidad por su frecuencia marginal en los dos años multiplicada por  $\alpha_j$ . En el AFMTC entendido como un ACIBP de una banda fila, tenemos dos bandas columna, mortalidad masculina prematura en 1995 y en 2005, por tanto se calculan dos contribuciones. Al sumar estas dos contribuciones se realizaría la labor del segundo sumando del ACIBP y las ponderaciones que introducen los coeficientes  $\beta_l$  y  $\alpha_j$  vendrían recogidas en  $\alpha_{lj}$ .

TABLA 2: Tabla de los 10 primeros valores propios del AFMTC y del ACIBP

AFMTC					ACIBP				
Valor propio x1000	Inercia acumulada x1000	%	% Acumulado		Valor propio x10000	Inercia acumulada x10000	%	% Acumulado	
1	73	73	24.7	24.7	1	74	74	24.1	24.1
2	51	125	17.4	42.1	2	51	124	16.7	40.7
3	40	165	13.7	55.8	3	40	164	13.0	53.7
4	28	193	9.3	65.1	4	28	192	9.0	62.8
5	22	214	7.4	72.4	5	21	213	6.8	69.5
6	15	230	5.1	77.6	6	15	227	4.8	74.3
7	13	242	4.3	81.9	7	11	239	3.7	78.0
8	11	253	3.8	85.7	8	10	248	3.1	81.2
9	9	263	3.1	88.8	9	8	256	2.7	83.9
10	8	271	2.8	91.6	10	6	263	2.0	85.9

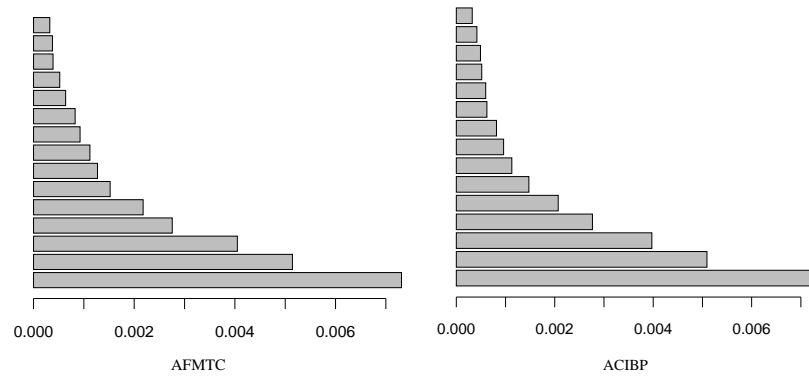


FIGURA 4: Histogramas de valores propios del AFMTC y del ACIBP

TABLA 3: Descomposición de la inercia en las bandas del AFMTC y del ACIBP

A. AFMTC										
Grupo	Inercia	Contribución	Inercia	Contribución	Calidad	Inercia	Contribución	Calidad	Calidad	Pesos
	Total	Total	Eje 1	Eje 1	Eje 1	Eje 2	Eje 2	Eje 2	Plano	Plano
	x10000	%	x10000	%	%	x10000	%	%	%	%
mp95	32	10.7	5.1	6.9	16.0	7.4	14.3	23.2	39.2	8.1
mnp95	48	16.2	10.3	14.1	21.6	7.4	14.3	15.4	37.0	22.1
fp95	32	10.8	10.1	13.8	31.4	2.0	4.0	6.4	37.8	6.6
fnp95	31	10.6	9.9	13.5	31.6	6.8	13.1	21.6	53.3	13.2
mp05	42	14.2	8.6	11.8	20.4	8.2	15.9	19.4	39.8	14.0
mnp05	42	14.2	9.7	13.2	23.0	6.0	11.7	14.3	37.3	18.1
fp05	38	13.0	9.1	12.4	23.6	7.7	14.9	19.9	43.5	8.5
fnp05	30	10.3	10.4	14.2	34.2	6.1	11.8	20.0	54.2	9.3
Total	296	100.0	73.1	100.0		51.4	100.0			100.0

B. ACIBP: sexo×edad (bandas columna)										
Grupo	Inercia	Contribución	Inercia	Contribución	Calidad	Inercia	Contribución	Calidad	Calidad	Pesos
	Total	Total	Eje 1	Eje 1	Eje 1	Eje 2	Eje 2	Eje 2	Plano	Plano
	x10000	%	x10000	%	%	x10000	%	%	%	%
mp	77	25.2	13	18.1	17.3	16	31.6	20.9	38.2	21.9
mnp	93	30.3	20	27.4	21.7	13	25.3	13.9	35.6	40.8
fp	74	24.3	20	27.0	26.7	9	17.7	12.1	38.8	15.2
fnp	62	20.2	20	27.5	32.8	13	25.4	21.0	53.7	22.2
Total	306	100.0	74	100.0		51	100.0			100.0

B. ACIBP: años (bandas fila)										
Año	Inercia	Contribución	Inercia	Contribución	Calidad	Inercia	Contribución	Calidad	Calidad	Pesos
	Total	Total	Eje 1	Eje 1	Eje 1	Eje 2	Eje 2	Eje 2	Plano	Plano
	x10000	%	x10000	%	%	x10000	%	%	%	%
1995	154	50.5	37	50.0	23.8	24	47.8	15.8	39.6	51.2
2005	151	49.5	37	50.0	24.3	27	52.2	17.6	41.9	48.8
Total	306	100.0	74	100.0		51	100.0			100.0

### 5.3. El ACIBP visto como dos AFM

Para poder interpretar los valores propios tanto del AFMTC como del ACIBP como un análisis factorial se debe tener en cuenta la consideración hecha en la sección 4.1. En el AFMTC valor propio asociado al primer eje es 6.28, su valor máximo es 8 debido a que hay 8 bandas columna. El primer eje es una dirección de inercia importante para los 8 grupos, los ejes dos y tres son direcciones específicas

de dispersión a algunos grupos. Las inercias de los grupos masculino no prematuro en 1995 y femenino prematuro no en 2005 es 0.9, próxima al valor máximo 1, por tanto, el primer eje es su principal dirección de dispersión. En cuanto al ACIBP, el primer valor propio asociado a la bandas columna es 3.32 (su máximo posible es 4), de esta forma, el primer eje es una dirección de dispersión común a las cuatro bandas. El primer valor propio para las bandas fila es 1.89. La inercia sobre el primer eje para los dos años es de 0.95 (su máximo posible es 1), por tanto el primer eje es la principal dirección de dispersión de los dos años. Ambos análisis llevan a las mismas conclusiones, pero en el ACIBP tenemos dos visiones para la descomposición de la inercia. De esta forma, podemos analizar por separado la distribución de las causas de mortalidad para los años.

TABLA 4: Descomposición de la inercia en el AFMTC

Año		Eje 1	Eje 2	Eje 3
	Valores propios	6.28	4.42	3.48
		(100 %)	(100 %)	(100 %)
	masculino prematuro	0.44	0.63	0.19
		(6.9 %)	(14.3 %)	(5.5 %)
	masculino prematuro	0.89	0.63	0.69
		(14.1 %)	(14.3 %)	(19.8 %)
1995	femenino prematuro	0.87	0.18	0.17
		(13.8 %)	(4.0 %)	(5.0 %)
	femenino no prematuro	0.85	0.58	0.43
		(13.5 %)	(13.1 %)	(12.3 %)
	masculino prematuro	0.74	0.70	0.33
		(11.8 %)	(15.9 %)	(9.5 %)
2005	masculino noprematuro	0.83	0.52	0.86
		(13.2 %)	(11.7 %)	(24.8 %)
	femenino prematuro	0.78	0.66	0.32
		(12.4 %)	(14.9 %)	(9.3 %)
	femenino no prematuro	0.89	0.52	0.48
		(14.2 %)	(11.8 %)	(13.8 %)

TABLA 5: Descomposición de la inercia en el ACIBP visto como dos AFM

A. Bandas columna				
	Eje 1	Eje 2	Eje 3	
V. Propios	3.32	2.30	1.80	
(sexo×edad)	(100 %)	(100 %)	(100 %)	
masculino prematuro	0.60	0.73	0.22	
	(18.1 %)	(31.6 %)	(12.0 %)	
masculino no prematuro	0.91	0.58	0.88	
	(27.4 %)	(25.3 %)	(49.0 %)	
femenino prematuro	0.90	0.41	0.20	
	(27.0 %)	(17.7 %)	(11.1 %)	
femenino no prematuro	0.92	0.58	0.50	
	(27.5 %)	(25.4 %)	(27.9 %)	
B. Bandas fila				
	Eje 1	Eje 2	Eje 3	
Valores Propios	1.89	1.31	1.02	
(años)	(100 %)	(100 %)	(100 %)	
1995	0.95	0.63	0.40	
	(50.0 %)	(47.8 %)	(39.5 %)	
2005	0.95	0.68	0.62	
	(50.0 %)	(52.2 %)	(60.5 %)	

### 5.3.1. Primer plano factorial

En el primer plano factorial del AFMTC que muestra las posiciones globales de las comunidades, figura 5A, el primer eje contrapone a Canarias de las demás comunidades. A Canarias se asocian causas de mortalidad por diabetes en los dos años para mujeres y hombres independientemente de la edad. En el País Vasco, Cataluña y Madrid, las mujeres mayores en ambos años están asociadas a mortalidad por causa de enfermedades mentales, y las mujeres adultas a mortalidad por cáncer de pulmón (figura 7A). A los hombres mayores de estas comunidades se asocian enfermedades mentales y cáncer de hígado y a los adultos mortalidad por sida en 1995 y por cáncer de esófago en los dos años (figura 7B).

De otra lado, a las comunidades Extremadura, Andalucía y Castilla la Mancha se asocian mortalidad por cáncer de útero para las mujeres adultas y mortalidad por enfermedades cerebro vasculares para las mujeres mayores en ambos años. A los hombres adultos se asocian mortalidad a causa de accidentes de tránsito y suicidio en los dos años y a los mayores mortalidad por causa de enfermedades cerebro vasculares (1995).

En el AFMTC la estabilidad de las comunidades se debe leer en los planos factoriales de las causas de mortalidad y de las representaciones superpuestas (figuras 7 y 10A), ya que la posición de las comunidades sobre el plano (figura 5A) son los promedios de las causas en los dos años. Esto dificulta obtener conclusiones precisas dado que una comunidad puede mantenerse estable solo para ciertas causas. La figura 5B permite ver la estabilidad de las comunidades con claridad, dado que en el ACIBP a cada comunidad le corresponde dos puntos, donde cada punto es el promedio de las causas de mortalidad para un año en específico. Las comunidades más estables en el primer plano son Castilla la Mancha, Cataluña y el País Vasco, y las más inestables son Canarias, Madrid y Andalucía. En el ACIBP, el plano de la figura 5B nos da una idea de la estabilidad de la comunidad y posteriormente el plano de la figura 6 nos permite asociar a cada comunidad ciertas causas de mortalidad.

### 5.3.2. Plano 2-3

El análisis del segundo plano factorial muestra los mismos resultados para los dos análisis (figuras 8 y 9). El segundo eje contrapone Madrid y País Vasco de Castilla la Mancha y Extremadura (todas bien representadas). Al País Vasco y Madrid se asocian enfermedades mentales y cáncer de boca en hombres, mientras que a C. la Mancha y Extremadura se asocian suicidio y enfermedades de pulmón. El tercer eje contrapone Asturias y Madrid. A Madrid se asocian causas de mortalidad por neumonía en las mujeres y hombres mayores, mientras que a Asturias se asocian suicidio y cáncer de pulmón.

En conclusión, ambos análisis muestran las mismas asociaciones entre causas de mortalidad y comunidades tanto en el primer plano factorial como en el plano 2-3. Sin embargo, los planos del ACIBP permiten el análisis de la estabilidad de las comunidades que no es posible en los planos del AFMTC.

## 5.4. Análisis de las representaciones superpuestas

En el AFMTC la representación superpuesta permite comparar la nube media de cada comunidad con las ocho nubes parciales ( $\text{sexo} \times \text{edad} \times \text{año}$ ) simultáneamente. Cada comunidad tiene un punto global o centroide que es el promedio de los 8 puntos parciales  $\text{mp95}$ ,  $\text{mnp95}$ ,  $\text{fp95}$ ,  $\text{fnp95}$ ,  $\text{mp05}$ ,  $\text{mnp05}$ ,  $\text{fp05}$  y  $\text{fnp05}$ . Hay entonces  $17 \times 9 = 153$  puntos en el plano de las representaciones superpuestas. Los cocientes de  $\text{InerciaEntre}/\text{InerciaTotal}$  son 87.1 %, 70.8 % y 62.8 % para el primer, segundo y tercer eje respectivamente. Se confirma entonces el carácter común del primer eje a los 8 grupos y por tanto se justifica la representación superpuesta, en el sentido que estos 8 puntos parciales están próximos entre sí y pueden ser comparados. En el ACIBP, a cada comunidad le corresponden dos puntos, uno para cada año. Cada punto es el promedio de los 4 puntos parciales inducidos por la partición  $\text{sexo} \times \text{edad}$ , por tanto hay  $17 \times 2 \times 5 = 170$  puntos en el plano de las representaciones superpuestas. La representación superpuesta para las causas de mortalidad solo es posible para el ACIBP, a cada causa de mortalidad corresponde tres puntos (el punto parcial de 1995, el punto parcial del 2005 y el centroide o promedio de los dos puntos parciales) y hay 55 causas de mortalidad, por tanto el plano consta de  $55 \times 3 = 165$  puntos.

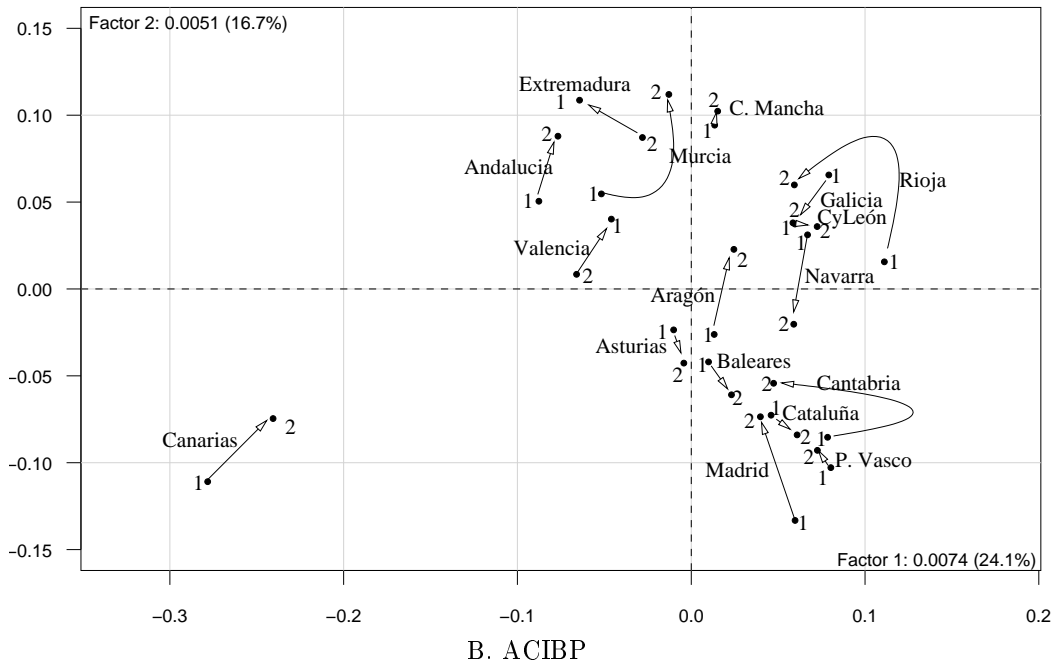
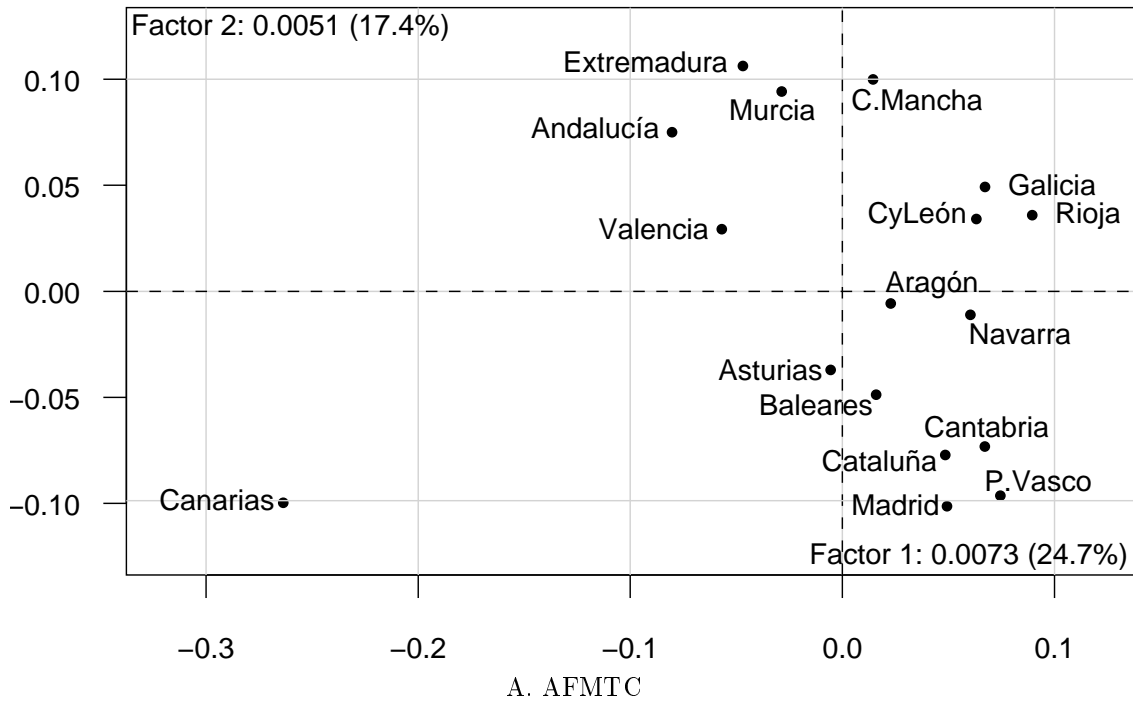


FIGURA 5: Primer plano para las comunidades

Los cocientes de InerciaEntre/InerciaTotal considerando las bandas columna son 90%, 74.8% y 62.9% para los tres primeros ejes. Considerando las bandas filas son 95.7%, 86.8% y 86.3%. Estos indican que hay menos dispersión global entre los dos años que entre los cuatro grupos poblacionales que define edad x sexo.

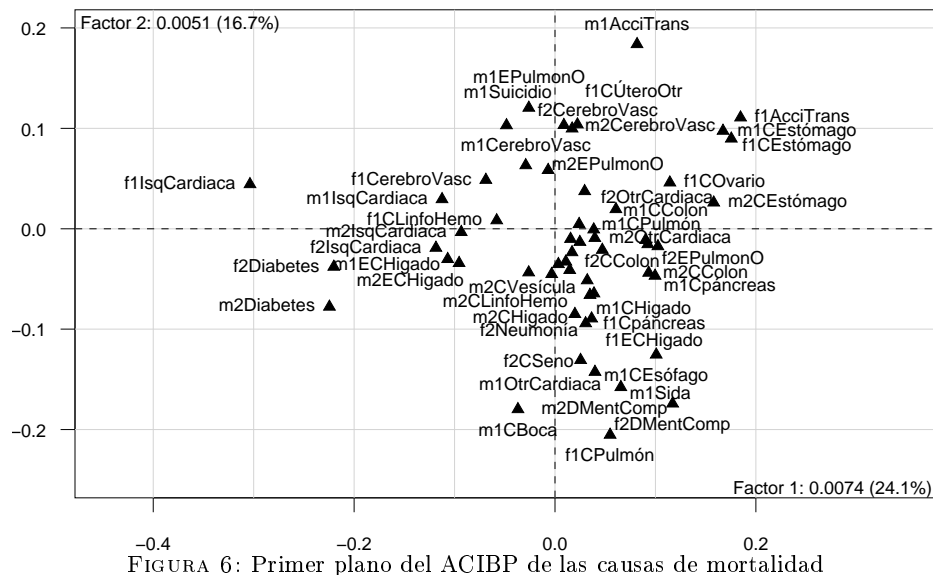


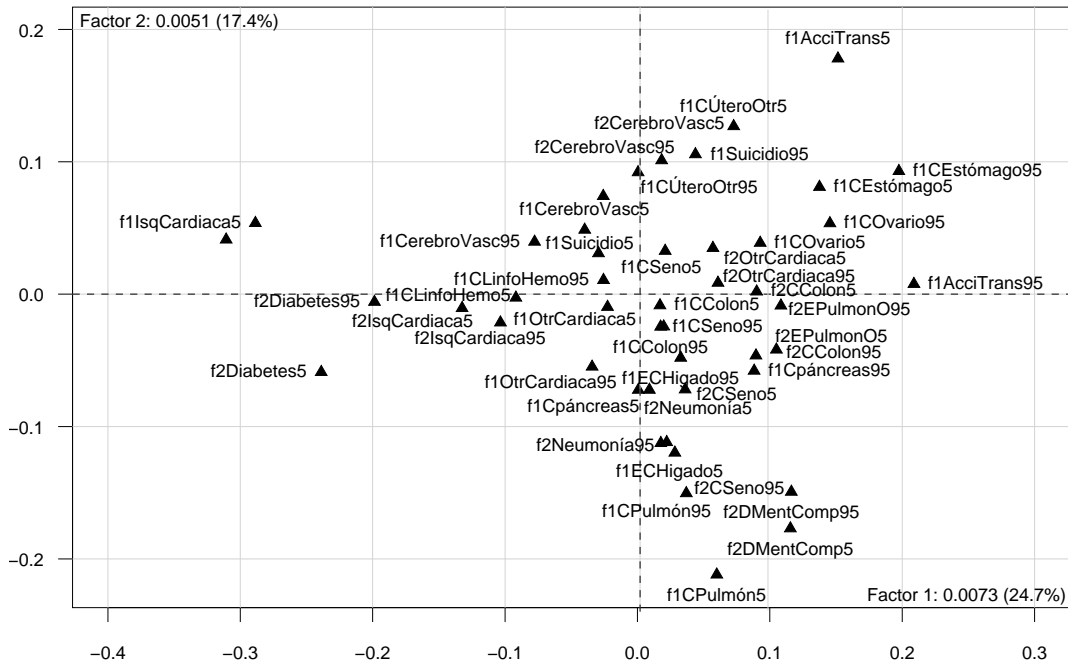
FIGURA 6: Primer plano del ACIBP de las causas de mortalidad

#### 5.4.1. Comunidades

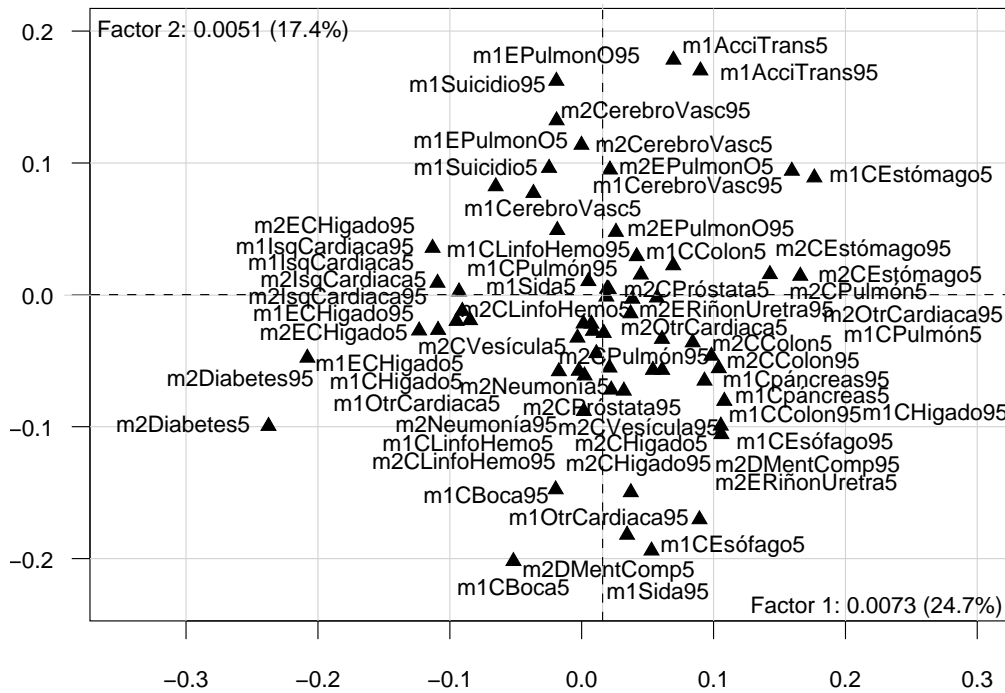
La representación superpuesta del AFMTC para las comunidades (figura 10A) no permite ver claramente si el perfil de las comunidades cambia al pasar de 1995 al 2005. Esto se debe a que los puntos parciales combinan para cada año los cuatro grupos poblacionales considerados. Para determinar si una comunidad es o no estable se debe entonces hacer un balance de los cuatro puntos parciales para cada año. Por el contrario el ACIBP (figura 10B) esta lectura es directa. La representación de los puntos parciales para Canarias permite observar que los perfiles de mortalidad no prematura para los hombres y las mujeres son muy diferentes para los dos años. La representación del AFMTC, en la figura 10A no muestra diferencias tan importantes para el perfil de mortalidad masculina no prematura y si para mortalidad masculina prematura con respecto al primer eje, pero este punto no esta bien representado en el primer eje (tabla 4). Si contrastamos con los datos, observamos que efectivamente hay diferencias importantes para la mortalidad no prematura de los hombres. La mortalidad por cáncer de estómago pasa de 85.8 a 49.5, por cáncer de próstata de 282.4 a 168.8, por isquemia cardíaca de 901.7 a 693.5 y por enfermedades cerebrovasculares de 522.1 a 292.4. Para las mujeres adultas, la mortalidad por otras causas cardíacas pasa de 457.5 a 284.9 y por enfermedades del cerebrovasculares pasa de 476.4 a 267.7.

La proximidad de los dos puntos parciales año para el País Vasco se interpreta en términos de semejanza en el perfil de causas de mortalidad en el 1995 y 2005. El ACIBP muestra alejados los puntos de mortalidad masculina prematura, los datos revelan que para esta comunidad la mortalidad por sida para hombres adultos pasa de 23.9 a 7.3, y por cáncer de estómago pasa de 22.6 a 12.6, en contraste con la mortalidad por suicidio que pasa de 11.1 a 11.6. El AFMTC los puntos parciales mas distantes son para mortalidad femenina prematura, sin embargo los datos muestran que los únicos cambios importantes son para la mortalidad por cáncer de pulmón que pasa de 6.9 a 16.2 y para enfermedades crónicas del hígado que pasa de 9.8 a 5.2.

Galicia, también es una comunidad estable, las principales diferencias son para la mortalidad masculina prematura. La mortalidad por cáncer de pulmón pasa de 15.6 a 7.6 y por enfermedades crónicas del hígado pasa de 34 a 7.6. Castilla la mancha es la comunidad mas estable, las diferencias mas importantes son para la mortalidad en las mujeres adultas y para los hombres mayores en los dos años. En las mujeres adultas, la mortalidad por cáncer de pulmón aumenta de 3.4 a 7.4, mientras que por cáncer linfático de 9 a 5.9. En los hombres mayores la mortalidad por enfermedades crónicas del hígado pasa de 64.9 a 38.9 y por otras enfermedades cardíacas pasa de 423.7 a 271.2.



A. Causas de mortalidad para las mujeres



B. Causas de mortalidad para los hombres

FIGURA 7: Primer plano del AFMTC de las causas de mortalidad

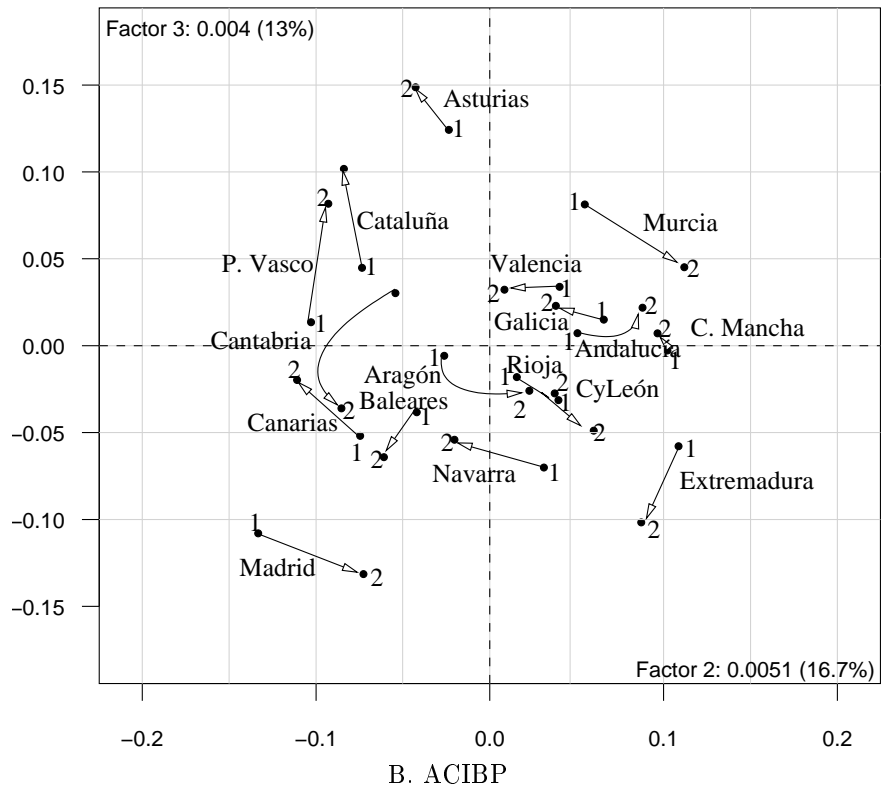
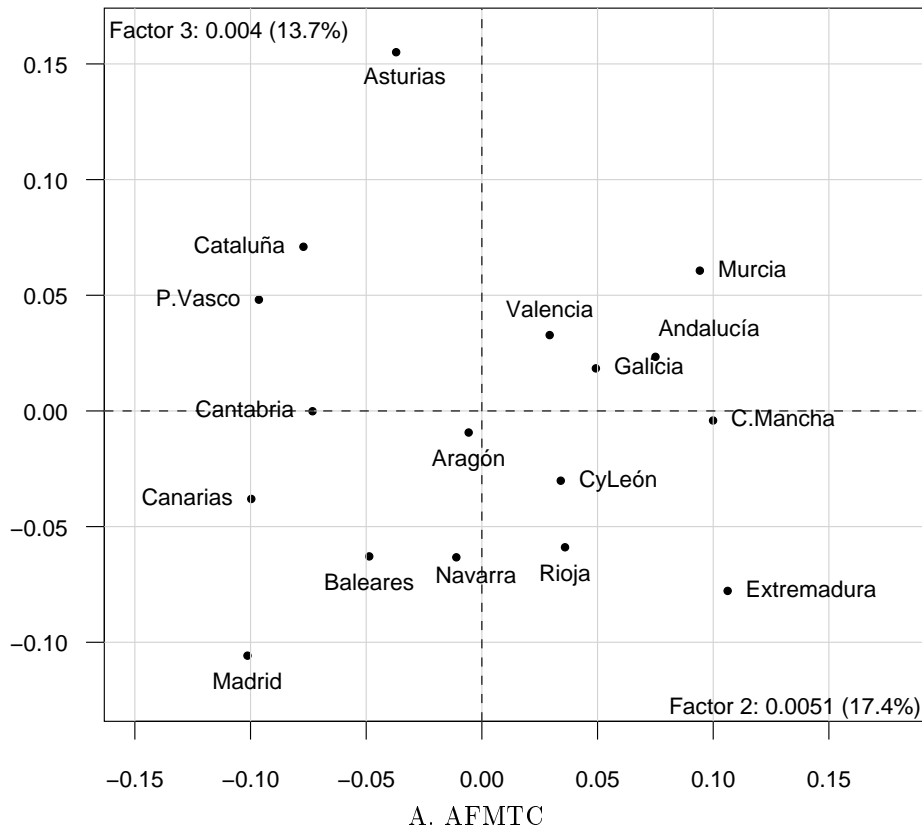


FIGURA 8: Plano 2-3 de la mortalidad en España para las comunidades

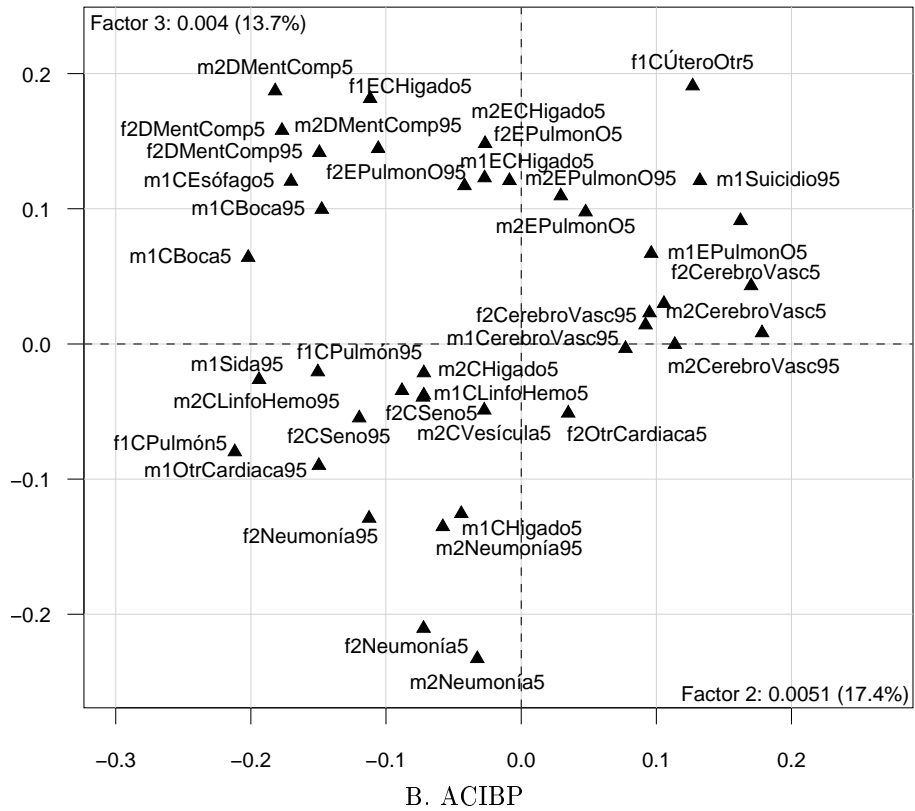
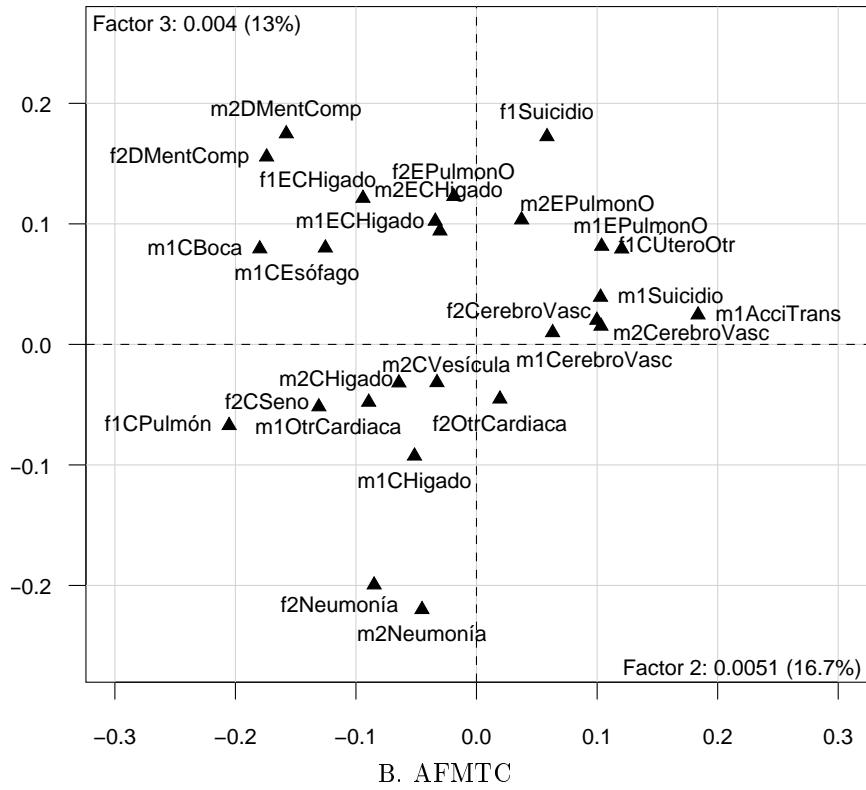


FIGURA 9: Plano 2-3 de la mortalidad en España para las causas de mortalidad

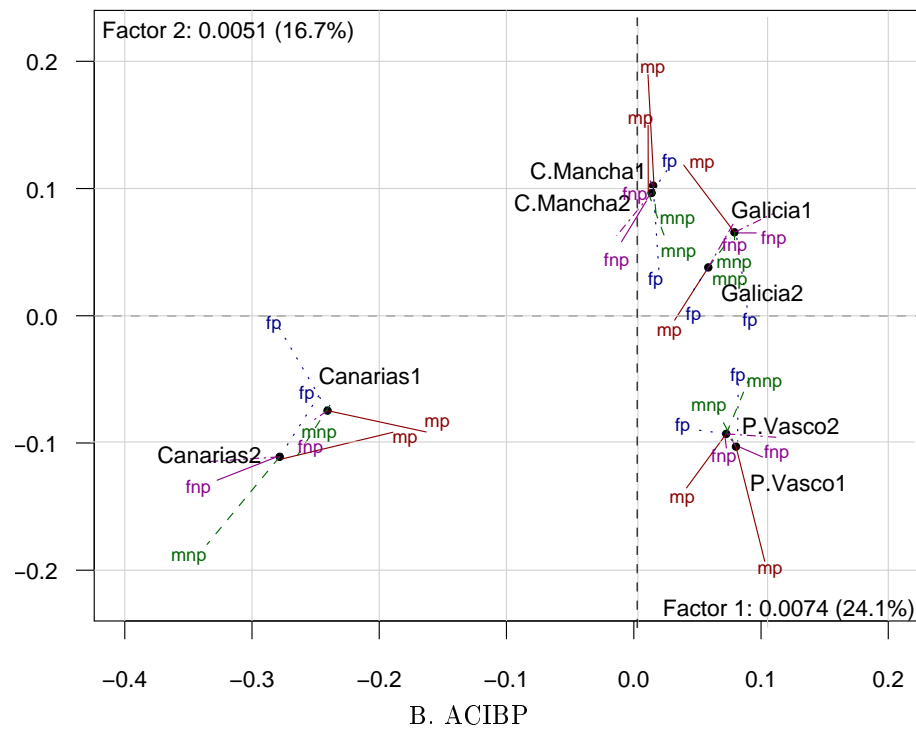
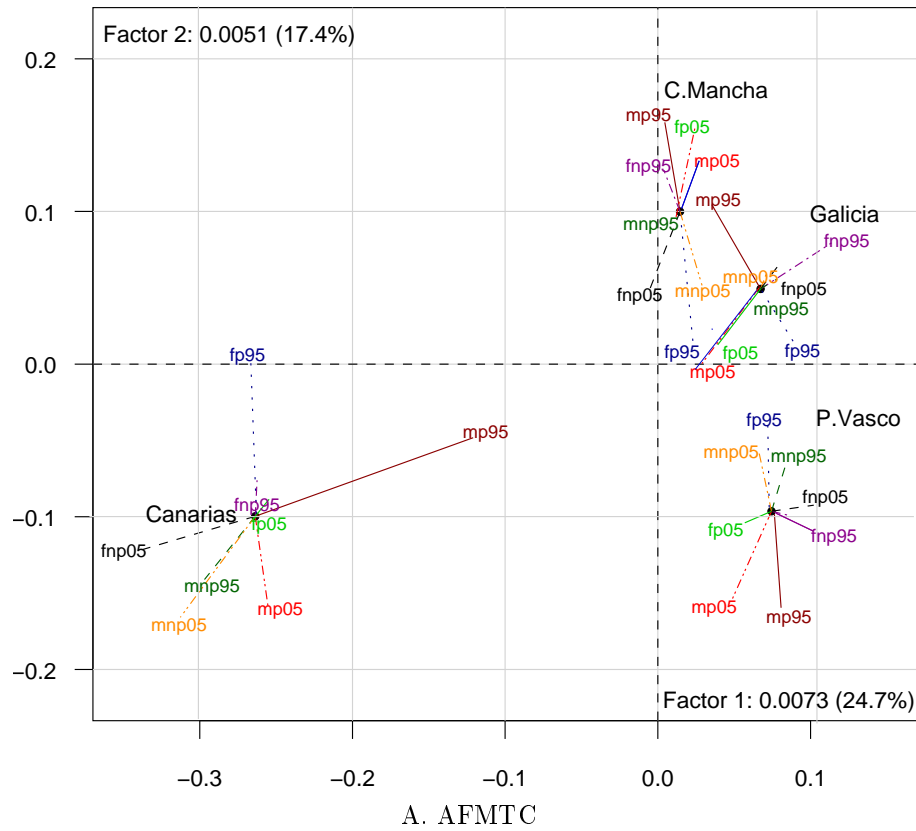
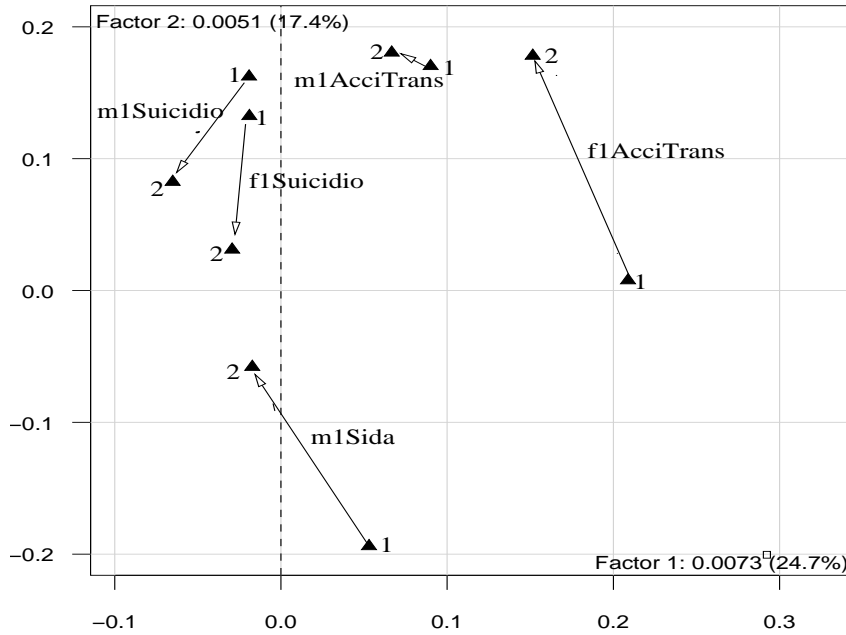


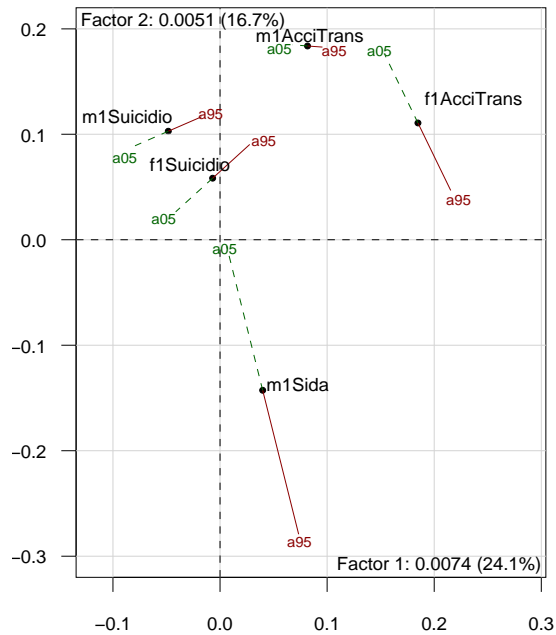
FIGURA 10: Representación superpuesta para algunas comunidades en el primer plano factorial

5.4.2. Causas de mortalidad

La representación superpuesta permite comparar globalmente si la distribución de las causas de mortalidad es la misma o no de un año a otro. Es por tanto una herramienta que resume tal distribución no solamente desde el punto de vista de las comunidades sino también desde el punto de vista de cada año.



A. Extracto de la representación en el primer plano factorial del AFMTC



B. Representación superpuesta en el primer plano factorial del ACIBP

FIGURA 11: Representación de algunas causas de mortalidad

En el AFMTC la representación superpuesta es posible solamente para las comunidades (filas) ya que la estructura de partición va inducida por las columnas. En este análisis una misma causa de mortalidad está representada por dos variables diferentes, por ejemplo, mortalidad por sida para hombres adultos es una variable para 1995 y otra para el 2005, por tanto no hay representación superpuesta para las causas de mortalidad y para ver la distribución global de las tasas de mortalidad en cada año se debe regresar a las figuras 7A y 7B.

En la figura 11A se presenta un extracto del primer plano factorial del AFMTC para algunas causas de mortalidad, en la figura 11B se encuentra la representación superpuesta del ACIBP para algunas causas de mortalidad. Puede verse como ambos análisis llevan a las mismas conclusiones. Por ejemplo, la mortalidad por sida para hombres adultos y accidentes de transporte para mujeres adultas son las causas de mortalidad que presentan mayor cambio en su distribución de un año al otro.

## 6. Conclusiones

El AFMTC y el ACIBP son métodos utilizados en el análisis de tablas de contingencia estructurada que tienen en cuenta la estructura de partición de la tabla equilibrando el papel de los bloques de manera que ninguna de ellos sea preponderante en el análisis. El ACIBP es la extensión del AFMTC para tablas con estructura de partición en las filas y las columnas. Algunas tablas pueden ser arregladas de tal forma que puede aplicarse cualquiera de los dos análisis, sin embargo al yuxtaponer los bloques en una dirección y aplicar el AFMTC, analizar el efecto de la variable que induce a la partición en la dirección que se omite es más complicado. Por ejemplo, al yuxtaponer los bloques solamente por columnas, el efecto sobre las filas de la variable que inducía la partición en las filas se combina con el efecto de la variable que induce la partición en las columnas y por tanto los puntos parciales no permiten analizar con claridad el efecto de la partición fila en los puntos fila.

Para comparar los pesos, valores propios e inercias de cada análisis se pueden adoptar dos perspectivas. Una, es ver el AFMTC como un ACIBP de una banda fila. La otra, es ver el ACIBP como dos AFMTC. En tal caso, las matrices de métricas de cada análisis deben ser modificadas.

En el ejemplo sobre mortalidad en España, el AFMTC elimina la variabilidad inducida por la variable que cruza  $\text{sexo} \times \text{edad} \times \text{años}$ . El ACIBP elimina la variabilidad inducida por la variable que cruza  $\text{sexo} \times \text{edad}$  y por años. En los dos análisis se analizan las causas de mortalidad en las comunidades quitando el efecto de las variables que inducen a la estructura de partición. El modelo de independencia intratablas del AFMTC coincide con el modelo de independencia intrabloques del ACIBP y por tanto la inercia analizada en cada caso es la misma. Sin embargo, el ACIBP permite dos visiones de la descomposición de la inercia.

Ambos análisis conducen a las mismas conclusiones en cuanto a las relaciones entre las comunidades y las causas de mortalidad. Sin embargo, los planos factoriales del ACIBP permiten leer la estabilidad de las comunidades. En el caso del AFMTC, esta estabilidad se debe leer en en plano de las representaciones superpuestas, pero esta mezclada con el efecto de los cuatro grupos poblacionales definidos por la variable categórica ( $\text{sexo} \times \text{edad}$ ). Esto es especialmente útil cuando se quiere hacer un análisis del efecto que tienen los años sobre la distribución de las causas de mortalidad en las comunidades autónomas. Por tanto es el investigador quien decide el método que emplea de acuerdo a los objetivos del estudio.

## Agradecimientos

Este trabajo de grado se enmarca dentro del proyecto de investigación: Comparación de métodos multivariados para el análisis de tablas estructuradas, del Departamento de Estadística, código Hermes 11319.

## Referencias

- Bécue, M. & Pagès, J. (2004), ‘A principal axes method for comparing contingency tables: Mfact’, *Computational statistics and data analysis* pp. 481–503.
- Benzécri, J. (1983), ‘Analyse de l’inertie intraclasse par l’analyse d’un tableau de correspondances’, *Les Cahiers de l’Analyse des Données* **8**(3), 351–358.
- Escofier, B. (1983), ‘Generalisation de l’analyse de correspondances a la comparaison de tableaux de frequence’, *Rapports de Recherche 207, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Centre de Rennes. IRISA* .
- Escofier, B. (1984), ‘Analyse factorielle en reference a un modele. application a l’analyse de tableaux d’echange’, *Revue de Statistique Appliquée* **32**(4), 25–36.
- Escofier, B. & Pagès, J. (1984), ‘L’analyse factorielle multiple: une méthode de comparaison de groupes de variables’, *Data Analysis and Informatics III, North-Holland, Amsterdam* pp. 41–46.
- Escofier, B. & Pagès, J. (1992), *Análisis factoriales simples y múltiples. Objetivos, métodos e interpretación*, Universidad del País Vasco, Bilbao.
- Niederlaender, E. (2006), ‘Causes of death in the EU’, *Luxembourg: Eurostat* .
- Pardo, C. (2010a), Comparación de métodos multivariados para el análisis de tablas estructuradas, PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Pardo, C. E. (2010b), *pamctdp: Principal Axes Methods for Contingency Tables with Partition Structures on Rows and Columns*. R package version 0.2.2.  
\*<http://CRAN.R-project.org/package=pamctdp>
- R Development Core Team (2010), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.  
\*<http://www.R-project.org>